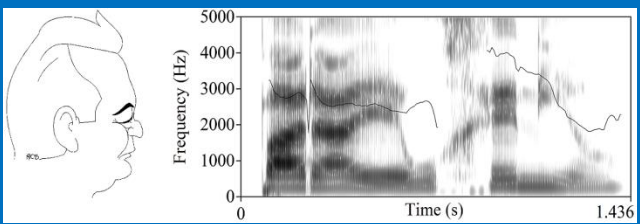
# Paradoxes i argumentació. De la retòrica als refinaments de la matemàtica

Sebastià Serrano




Fernández Planas, A. Ma. (ed.) (2016): *53 reflexiones sobre aspectos de la fonética y otros temas de lingüística*, Barcelona, págs. 493-501.
ISBN: 978-84-608-9830-6.

# Paradoxes i argumentació.

# De la retòrica als refinaments de la matemàtica

Sebastià Serrano
*Universitat de Barcelona*
sserrano@ub.edu

**RESUM**

Les paradoxes -i els problemes que aquestes susciten a la lògica- poden rastrejar-se, com a objecte de reflexió, des dels sofistes fins als matemàtics i filòsofs del llenguatge contemporanis, passant per Aristòtil, per Abel o per Russell, mentre l'àlgebra retòrica es convertia en àlgebra sincopada i finalment en àlgebra simbòlica. La paradoxa pot ser vista com un entrebanc que impedeix el raonament asèptic, però també com un estímul provocador per a la imaginació i per a la praxi argumentativa /persuasiva, un recurs retòric que ha mobilitzat al llarg de la història les energies del pensament rigorós a fi d'evitar el «contraban» de les fal·làcies en els discursos de tota mena. Un repte, doncs, que suscita la creativitat en l'àmbit d'una cultura deutora de la tradició retòrica.

Paraules clau: *retòrica, lògica, argumentació, paradoxa, autoreferència*.

## 1. LES PARADOXES EN L'ÀMBIT DE LA RETÒRICA CLÀSSICA

Ara fa vint-i-cinc segles, a Grècia, va passar un fet del tot transcendent pel que fa al desenvolupament de la cultura i, per tant, de la nostra espècie. Uns fets determinants, un context sociopoliticoeconòmic relacionat amb l'adveniment de la democràcia, van conduir la reflexió filosòfica de la realitat, del món, o del ser –és igual- cap al llenguatge. Recordem com tota la filosofia anterior, de Tales a Parmènides, havia pres com a objecte el món, la naturalesa, en un desig de donar compte dels fenòmens naturals. Els sofistes, en canvi, ja posen el llenguatge com a principal objectiu de la reflexió. Estudien estratègies discursives i comunicatives a fi d'ensinistrar en l'ús de la paraula. A partir d'ells una bona part de la gran filosofia grega esdevindrà filosofia del llenguatge ja sigui en forma de retòrica, de lògica, de poètica o de gramàtica. Plató i Aristòtil en són els sintetitzadors.

Amb l'adveniment de la democràcia, en la tradició grega, hi podem trobar l'interès i el gust per l'argumentació, la dialèctica i la construcció de discursos amb la intencionalitat d'esdevenir eficaços. Cada cop hi havia més consciència en què la capacitat de persuadir concedeix un poder indubtable a aquell que la posseeix: el de disposar dels mots sense necessitat de les coses, i de disposar de les persones en disposar dels mots, del discurs. En una societat com aquella en què certes classes populars havien accedit a la vida democràtica, l'argumentació i el debat públics tingueren una importància i arribaren a ser habituals en l'àgora i en els tribunals de justícia. La bona formació era fonamental. Una de les estratègies discursives habituals per reeixir en els debats consistia, per exemple, en partir de les premisses de l'adversari i arribar, com a conseqüència lògica, a un impossible.

Aristòtil assenyala a Zenó d'Elea i a Sòcrates com a mestres d'aquest pla estratègic. En aquell temps on l'argumentació era estel·lar començaren a aparèixer certes fal·làcies que obligaren a reflexionar sobre les condicions generals que haurien de caracteritzar un bon raonament. Per exemple, un raonament com «aquest gos és pare. Aquest gos és del seu amo. Per tant, aquest gos és pare del seu amo». Vet aquí com aquest resulta ser una raonament enganyós, tot i que segueix exactament un esquema de raonament correcte. Tal com passa a «aquest objecte és una capseta, aquest objecte és blau, per tant aquest objecte és una capseta blava». Exemples com aquests, seleccionats d'importants debats d'aquell moment, sabem que eren matèria de reflexió d'Aristòtil en la seva recerca de les lleis fonamentals de l'art del bon raonar. A més, Aristòtil reflexionava també sobre les argumentacions dels geòmetres immersos en el problema de descobrir l'art deductiu, les demostracions, que els dugués a superar la llarga crisi plantejada a l'entorn dels nombres irracionals o també dels infinitèsims. La paradoxa de Zenó, la d'Aquil·les i la tortuga era centre de molts debats. Com és ben sabut, la cosa anava així: Aquil·les, «el dels peus lleugers», competeix en cursa amb una tortuga, tot donant-li un avantatge inicial a aquesta, però quan  el guerrer arriba al punt d'on va sortir la tortuga, aquesta ja ha recorregut un petit tram més, raó per la qual Aquil·les ha de fer un nou trajecte fins el punt on havia arribat la tortuga en aquesta fase de la cursa, ja que l'animal ha avançat una mica més, i així successivament, de manera que -des d'un punt de vista de càlcul matemàtic, però contra l'evidència empírica- el corredor dels peus lleugers no acabaria mai de superar la distància que el separa del lent animal.

Certament, la reflexió sobre la validesa de l'argumentació hauria esdevingut gairebé obsessiva ja que era ben bé l'eix generador tant del discurs de la geometria com del de la retòrica i aquest darrer era, fins a cert punt, la mare de tots els discursos. Aquí rau el perquè de l'interès d'Aristòtil per establir una mena de «botànica» de les argumentació, és a dir, una classificació sistemàtica que ell anomenà sil·logística, en diferents modes de sil·logisme que oposava al sil·logisme retòric. Els modes sil·logístics resultaven una carcassa sense la flexibilitat que convenia a molts dels arguments emprats en geometria o a l'àgora. Per això escoles com la dels estoics o dels megàrics formularen esquemes lògics alternatius que no eren sil·logístics i que permetien operar amb més fluïdesa i flexibilitat. N'eren un bon exemple el parell de regles d'inferència anomenades *modus ponens* –és a dir, «si p aleshores q; es així que p, per tant q»- i *modus tollens* –«si p, aleshores q; és així que no q, per tant no p».

Està clar que, des de Plató, calia lligar la validesa de l'argumentació al concepte de veritat i això hauria de dur a la proliferació d'un fenomen lingüístic, lògic i matemàtic fascinant, les famoses paradoxes que creixeren com a bolets en el sí del camp dels discursos. En aquest sentit, els grecs formularen alguns dels enigmes, dels trencaclosques lògics que fins al dia d'avui han tornat a turmentar matemàtics, retòrics i filòsofs. Els sofistes arribaren a especialitzar-se en la papereta d'atordir i confondre els seus contrincants en els debats –sovint com a mers exercicis retòrics en el circ de la paraula- encara que la majoria només pretenia de surar una mica enmig d'un discurs pantanós basat en trucs dialèctics.

Hi hagué una colla d'enigmes torbadors i desconcertants que resistiren obstinadament tota mena d'esbrinaments. La major part d'ells s'originen en el que coneixem com «fal·làcies del cercle viciós» que són degudes al fet de negligir el principi fonamental que implica que el tot d'una totalitat donada no pot ser, ell mateix, membre d'aquesta totalitat. Ens ha arribat, per exemple, després de viatjar per tota la lògica medieval, la molt coneguda paradoxa del barber. Vet aquí que el barber del poble és aquell que afaita a totes les persones que no s'afaiten elles mateixes. Aleshores, el barber s'ha d'afaitar o no a ell mateix? Si ho fa, afaita a algú que s'afaita ell i així trenca la seva pròpia regla i si no ho fa, a més de restar sense afaitar, trenca també la regla en no afaitar a una persona del poble que no s'afaita ella mateixa.

Una altra bona part d'aquests enigmes tenen a veure amb la tradició de la paradoxa del mentider, també coneguda com la paradoxa d'Epimènides, cretenc ell, que va fer immortal l'enunciat: «tots els cretencs són mentiders» que admet les variants «estic mentint» o «aquest enunciat és fals». Fixem-nos com és un enunciat que de manera brutal contradiu la dicotomia universalment acceptada entre enunciats vertaders i falsos. Quan afirmo «el que dic és fals» el que dic no pot ser veritat ja que aleshores és fals. I no pot ser fals perquè aleshores seria veritat. No és ni vertader ni fals, o és les dues coses a la vegada, o millor, és vertader si és fals, i fals si és vertader. El descobriment d'aquesta circularitat quasi angoixant, contradictòria i inconcebible no ha de dur ni al llenguatge ni a la vida social a aturar-se com a conseqüència d'una col·lisió fascinant. Una cosa semblant es podria produir en parlar de temes com ara la «selecció natural» en biologia. Així, la selecció natural selecciona el més apte. Qui és el més apte? Qui selecciona la selecció natural... Tanmateix, la contrarietat, la desolació i, fins i tot el desconsol –penso en la lletra que li arriba a Gottlob Frege de part de Bertrand Russell- comença a l'hora de voler construir un edifici lògic, per encabir-hi la matemàtica, sense cap mena d'escletxa.

La paradoxa del mentider circula per totes les escoles de lògica que van del món medieval al modern. A mi m'encanta la dels caçadors caçats. Diria més o menys així´: la cacera en els territoris d'un príncep la castigaven amb la pena de mort. Tanmateix, més tard se li acudí de decretar que «a tot aquell que fóra sorprès caçant se li oferiria el privilegi de decidir si seria penjat o decapitat». El reu diria una frase i si era falsa seria penjat, mentre que si era certa seria decapitat. Un noi ben eixerit, lògic, aprofità aquesta dubtosa prerrogativa tot afirmant: «Em penjareu». No comptaven pas amb aquest dilema i ell va etzibar amb un raonament elegant «si em pengeu transgredireu les lleis del príncep ja que m'hauríeu de decapitar en dir la veritat, i si em decapiteu també les transgrediu ja que, si ho feu, el que he dit és fals i per tant m'hauríeu de penjar». Al meu llibre *La paradoxa* (Serrano, 1985), hi recullo –i en construeixo- molts exemples de paradoxes de mentiders. Per cert, una variant la trobem al Quixot. Se li encoloma al pobre Sancho Panza quan és governador de la Ínsula Barataria i ha de decidir si s'ha de donar mort o no al presoner que suscita una paradoxa semblant. Ell ho resol d'una manera pràctica, aplicant la màxima d'afavorir al reu en cas de dubte.

 ISBN 978-84-608-9830-6

## 2. EL DESENVOLUPAMENT DE L'ÀLGEBRA

Ens ha arribat un epitafi escrit a la tomba que guarda les cendres del molt anomenat matemàtic Diofant que visqué a Alexandria al segle III, en forma de enigma. En ell ens fa saber que la seva infantesa fou un sisè de la seva vida, que la seva barba va créixer durant un dotzè més, fins que després d'una setena part «s'encengué la flama del matrimoni» i que el seu fill nasqué cinc anys més tard per viure només la meitat de la vida sencera del pare, que va viure quatre anys més després de la mort del fill enmig d'un desconsol només mitigat «per la recerca en l'art dels nombres». Avui és molt fàcil de resoldre aquest enigma. Si <u>x</u> és l'edat a la que mor Diofant, aleshores

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

I vet aquí que el gran Diofant hauria viscut fins als 84 anys.

L'estudi de l'expressió dels enunciats matemàtics, el procés de simbolització i formalització, representa un dels esforços metodològics i epistemològics més impressionants de la ment humana que han de conduir a generar els més sofisticats formalismes que obre les portes de la intel·ligència artificial. Avui, tal com veiem en l'elemental equació de l'edat de Diofant, la solució és gairebé immediata. En canvi, només el problema de la notació de les expressions dels enunciats de la geometria o de l'aritmètica grega ja era considerable. Moltes de les formulacions modernes són el resultat d'una transcripció de les gregues presentades originalment en diverses formes de llenguatge ordinari on sovintejaven paraules d'un ampli espectre semàntic. En realitat, una bona notació no la trobem fins a l'obra del matemàtic Vieta, a finals del segle XVI, i no es generalitzarà la formulació algebraica que coneixem fins a la meitat del segle XVII, i encara amb certes reminiscències del llenguatge ordinari. Cosa que ha dut als estudiosos de l'àlgebra a establir la distinció, per etapes, entre *àlgebra retòrica, àlgebra sincopada* i *àlgebra simbòlica.*

L'aritmètica de Diofant, i una bona part de la matemàtica grega, reapareix durant el segle IX traduïda, i ben païda i comentada, a l'àrab. També veu la llum a les primeries del segle IX el primer tractat d'àlgebra obra d'al-Hwarizmi. Durant molt de temps l'àlgebra serà considerada com la ciència de les equacions. Tots aquests tractats, traduccions i comentaris, aritmètics i algebraics, àrabs entren a occident a través del matemàtic Fibonaci a començaments del segle XII. Fibonaci fa una autèntica apologia del sistema de numeració hindú empeltat d'àrab vigent fins avui. Ensenya a llegir i a escriure els nombres i informa sobre les regles de càlcul, l'operativitat entre els nombres, enters i fraccionaris, l'extracció d'arrels quadrades i, sobretot, els mètodes, els algoritmes, de resolució d'equacions, de les de primer i de segon grau, i això ho fa sota la forma d'un exquisit model de teoria de l'argumentació, que, al cap i a la fi, no deixa de ser –tal com afirmava Aristòtil- el tabernacle de la retòrica.

Instal·lada l'àlgebra, comença la cursa per la resolució de les equacions de tercer grau, i després de quart. Resoldre una equació volia dir determinar el valor de la variable mitjançant un càlcul –un algoritme- que afectava només els coeficients que acompanyaven la variable en els seus diferents graus. Al segle XVI, Gerolamo Cardano i

Niccolò Fontana (conegut com «Tartaglia», que vol dir tartamut) trobaren una solució per a la de tercer grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ i més tard, un deixeble de Cardano, Lodovico Ferrari, va resoldre a finals del segle l'equació de quart grau. Els esforços ingents dels algebristes més famosos trobaren un gran topall, un punt crític, en la resolució de l'equació de cinquè grau fins que el matemàtic Abel l'any 1826 aconseguí de demostrar la impossibilitat de resoldre-la –ni les posteriors- pels procediments habituals. Tota una frustració per als grans cervells matemàtics.

Tanmateix, Abel introdueix una altra manera d'operar davant d'un problema d'àlgebra. Per primera vegada es fa la gran pregunta: Què vol dir resoldre un problema? I dissenya un programa sobre procediments per resoldre'l i sobre com formular aquests procediments. Una vertadera reflexió sobre el discurs de la resolució de problemes i de com –en el nostre llenguatge- podríem estandarditzar aquests procediments, algoritmes, com els podríem formalitzar i, fins i tot, automatitzar. Una altra cara de la teoria de la demostració i de la teoria de l'argumentació. Lògica i nucli de la retòrica configurada alhora.

## 3. LA LÒGICA I LA MATEMÀTICA CONTEMPORÀNIES

Cap a 1885 el matemàtic alemany Georg Cantor formula una teoria atractiva i vigorosa que significaria un repte molt fort per a la intuïció, la famosa *Teoria de Conjunts*. L'impacte en el món de la lògica i la matemàtica va ser molt gran ja que més d'un pensà que podia esdevenir la gran teoria abstracta reunificadora de les diferents branques de les matemàtiques. Ben aviat un lògic de la categoria de Frege s'aventurà a fonamentar l'aritmètica sobre la base de la teoria de conjunts, tasca en la que treballà força temps. En acabar-la, n'envià el resultat –els *Fonaments de l'Aritmètica*- a alguns dels matemàtics més preparats del moment. Ho va fer a Russell que li contestà tot seguit amb una carta tal que el propi Frege pensa que no li desitjaria ni al pitjor enemic. Res, vet aquí que Russell detectà unes paradoxes que apareixen ben aviat en el sistema de Frege introduint així unes febleses que amenacen tota la construcció.

Russell li fa avinent una paradoxa –coneguda com la *paradoxa de Rusell*- que en la formulació que li va donar Kurt Grelling ve a dir el següent: Dividirem tots els predicats en dues grans categories (conjunts), aquells que es poden predicar –dir- de si mateixos com és el cas de «polisil·làbic», que efectivament és un mot polisil·làbic o el cas de «català», que certament és un mot català (ja que la paraula «polisil·làbic» conté, ella mateix, diverses síl·labes, i la paraula «català» és una unitat lèxica que podem trobar en un diccionari d'aquesta llengua). Aquests predicats els anomenem *autològics* i el conjunt que els conté, *autològic*. D'altra banda, seran *heterològics* els que no es poden predicar d'ells mateixos tal com passa amb «monosil·àbic» o «castellà», ja que la primera paraula no és monosil·làbica i la segona no és castellana. La gran pregunta és pel predicat *heterològic*. Què és, autològic o heterològic? A quin conjunt pertany? No pot pertànyer més que a un dels dos. I, si és autològic aleshores és heterològic i en cas de ser heterològic seria autològic. Dit d'una altra manera. Només pot ser autològic en el cas de ser heterològic i a l'inrevés. I només pertany al conjunt autològic si no hi pertany. «Déu meu»! exclamaria Frege. Se'n va així en orris el principi aristotèlic del terç exclòs (és viu

 *ISBN 978-84-608-9830-6*

o és mort: A és B o no és B, sense possibilitats intermèdies). Aquest fet sotraga la base de la teoria.

L'autoreferència és l'arrel del mal, l'oxigen que alimenta la flama. La paradoxa rau en el fet que hi ha un enunciat sobre un enunciat. Dir «aquest enunciat és fals» és metallenguatge. Llenguatge sobre el llenguatge i és així que el conjunt «paradoxal» de Russell no és més que el resultat de poca cura en no veure que cal diferenciar entre conjunts i metaconjunts, un conjunt de conjunts. El problema era la mescla de nivells, de *tipus* en dirà Rusell. La solució, marcar bé les fronteres i els tipus, diferenciar clarament els nivells d'abstracció. Així les regles dels monumentals *Principia Mathematica* de Bertrand Russell i Alfred North Whitehead no hauran de permetre el circuit tancat de realimentació reversible com el peix que es mossega la cua i que obria la possibilitat d'autocontradicció. De fet, era un autèntic tallafoc que impedia el vici de circularitat en els raonaments. Les reminiscències de la paradoxa del «mentider» desapareixien de l'escena definitivament. Semblava que tot era perfecte en el món de la lògica.

Durant la primera dècada del segle XX també Hilbert vivia amb el cor encongit per la crisi perceptible en el si de les matemàtiques a causa de les paradoxes i això el porta a fer una crida als matemàtics a «posar ordre» a la teoria de conjunts de Cantor sobre una base axiomàtica sòlida –com Russell- integrada per un nombre limitat de postulats. Això va marcar un gir important d'èmfasi cap a l'abstracció en les matemàtiques. Els matemàtics s'allunyen cada cop més del «contingut intuïtiu», en aquest cas format per superfícies o línies cap a una situació en que els termes matemàtics s'alliberen del seu contingut directe i simplement es defineixen de manera axiomàtica dins del context, del marc, d'una teoria.

L'era del formalisme havia arribat i tant podien referir-se a nombres, línies rectes o núvols o cors trencats. Aquest formalisme va donar un fort impuls a l'aplicació de les matemàtiques per tal de resoldre problemes que fins aleshores es consideraven impossibles de sotmetre a un tractament altament formalitzat. David Hilbert, i després André Weil i John Von Neumann, van tenir un èxit considerable a l'hora d'ampliar l'aproximació axiomàtica a una sèrie de problemes nous, pot ser els més emblemàtics els de la nova física, la *mecànica quàntica* però també a la lògica o a la nova teoria dels jocs. La matemàtica havia esdevingut més que una professió, ara era una aventura meravellosament dinàmica. Amb Allan Turing, Claude Shannon o Norbert Wiener començava a quallar una idea fantàstica que la ment humana podria aconseguir qualsevol cosa amb idees matemàtiques. Ho hem de trobar intel·lectualment fascinant i estèticament molt atractiu. Sí, i en matemàtiques es faran molts avenços gràcies al fet de veure relacions insospitades entre objectes que semblen intractables i altres que els matemàtics ja tenen més per la mà.

Tanmateix, en un moment de molt optimisme matemàtic com aquell arribarà Kurt Gödel amb el seu teorema de la Incompletitud per a aigualir l'optimisme de Hilbert i Russell (Hofstadter, 1979). Les paradoxes eren ben vives!. Amb un exercici lògic impecable, dels més brillants, més difícils i més sorprenents de la lògica moderna Gödel es proposa demostrar que el mètode axiomàtic formal que tant i tant bé ha servit a la matemàtica té les seves limitacions. En certa manera ens ve a dir que la deducció formal s'ha refutat, en part, a si mateix. Això si, tal com ens volen fer veure Ernest Nagel i James R. Newman en el seu cèlebre treball *El Teorema de Gödel* (Nagel i Newman, 1970), la demostració de

Gödel no és motiu per a la desesperança, ans al contrari, justifica «una nova apreciació del poder de la raó creadora».

Pensem que les paradoxes, que començaren com una pedra a la sabata del bon raonament, de l'argumentació vàlida, tant a l'àgora com al primigeni discurs lògic i matemàtic, han acabat esdevenint un punt de referència clau a l'hora de fonamentar el discurs del rigor i la claredat i on no hi té cabuda cap «informació de contraband» que pugui provocar una autocontradicció. Tanmateix, la papallona de les paradoxes segueix volant en el si de l'univers dels discursos, com una de les mostres de creativitat més reeixides en els espais de la cultura.

## 4. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

HOFSTADTER, D. R. (1979): *Gödel, Escher, Bach: An eternal golden brain*, Nova York, Basic Books.
NAGEL, E. i J. R. NEWMAN (1970): *El teorema de Gödel*, Madrid, Tecnos.
SERRANO, S. (1988): *La paradoxa*, Barcelona, Proa.
SERRANO, S. (1996): *Comunicació, Llenguatge i Societat*, Barcelona, Edicions 62.

 *ISBN 978-84-608-9830-6*